**Лабораторная работа №2**

**Задание 2.1**

Тема: «Математические объекты и их представления»

**Определения компьютерной алгебры:**

1. **Компьютерная алгебра** — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы, слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре.
2. **Компьютерная алгебра**, называемая также символьными вычислениями, — научная дисциплина, ставящая целью разработку алгоритмов и программного обеспечения для решения с помощью компьютера задач, в которых исходные данные и результаты имеют вид математических выражений, формул. Выполнение каждого такого алгоритма состоит в проведении некоторых формульных выкладок.

**Классификация математических объектов компьютерной алгебры**

* алгебраические выражения,
* ряды,
* уравнения,
* векторы,
* матрицы
* Дифференциальные кольца
* кольцо целых чисел,
* поле рациональных чисел,
* кольцо вычетов по некоторому модулю,
* кольца многочленов,
* различные элементарные функции.

**Особенности работы с математическими объектами**

**Представление целых чисел.**

В системе рассматриваются точные аналитические преобразования и никакие округления или др. искажения целых чисел недопустимы. Необходимо рассматривать целые числа произвольной длины. Для представления выбирают в качестве основания некоторое число N и представляют числа, по аналогии с обычной десятичной системой, относительно этого основания (с помощью цифр от 0 до N-1) с добавлением знакового бита. Н-р, на 32-битовых компьютерах можно выбрать в качестве N 109, или 230, или 231.

**Представление дробей.**

Обыкновенные дроби представляются в виде пары целых чисел: числителя и знаменателя (p/q,q≠0). Не нужно их заменять приближенными значениями с плавающей точкой. Н-р: умножение дробей a/b и c/d, представленных в несократимом виде: . НОД (a,d); НОД (b,c); a’=a/НОД(a,d); b’=b/НОД(b,c); c’=c/НОД(b,c); d’=d/НОД(a,d); p=a’c’; q=b’d’.

**Представление полиномов.**

Все системы могут работать с полиномами произв. числа переменных. Их можно +,-,\*,/, операция упрощения. Представление математических объектов (полиномов) называются каноническим, если две различные записи соответствуют всегда двум различным объектам. Представление называются нормальным, если представление нуля моноида единственно. Представление называются разреженным, если нулевые члены явно в нем не представлены. (мы пишем 8x3+7 вместо 8x3+0x+7) Представление называются плотным, если в нем явно представлены все члены. Наиболее очевидным компьютерным представлением полинома anxn+an-1xn-1+…+a1x+a0 является его представление таблицей коэффициентов [an,an-1,…,a0].-плотное представление.

**Представление рациональных функций.**

Большинство вычислений используют не только полиномы, но и их отношения, т.е.

рациональные функции. Если представить рацион. функцию как полином (числитель), деленный на другой полином (знаменатель), то получается нормальное представление, т.к. функция есть нуль тогда и только тогда, когда ее числитель есть нуль. Естественно потребовать, чтобы в канон. представлении не существовало какого-либо общего делителя числителя и знаменателя. В общем случае приходим к представлению с минимально возможной степенью числителя (или знаменателя). Правила для рацион. функций: 1.-в выражении не д.б. рацион. коэффициентов; 2.-никакое целое число не может делить как числитель, так и знаменатель; 3.- старший коэффициентов знаменателя выражения д.б. положительным.

**Представление алгебраических функций.**

Под алгебраическими объектами (числами и функциями) понимают решение полиномиальных уравнений. Н-р,

- алгебраическое число, как решение уравнения x2-3=0. Различают три класса алгебраических выражений: 1.- простые

радикалы (н-р, ). Две проблемы – однозначность представления (н-р,,

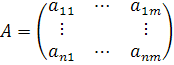
ее универсальное решение очень сложно) и взаимная зависимость радикалов – корни различных степеней могут выражаться один через др. (рассмотрим , тогда, т.к. x4+4=(x2-2x+2)\*(x2+2x+2),

то получаем ); 2.- вложенные радикалы (н-р, ). Две проблемы однозначности и соотношение между радикалами (н-р, ); 3.- общие алгебраические выражения (н-р, алгебраическое число γ, определенное уравнением γ5+γ+1=0). Требуется, чтобы полиномы, определяющие алгебраические числа и функции, были неприводимыми (неразложимыми).

**Представление трансцендентных функций.**

Трансцендентные функции группируются в несколько классов функций, каждый из которых имеет свои правила преобразования и упрощения. Классы: 1.- кл. тригонометрических функций; 2.- кл. экспоненциальных функций; 3.- кл. логарифмических функций; 4.- кл. обратных тригонометрических функций. Трансцендентные функции могут являться аргументами и коэффициентами рациональных функций, а также входить в алгебраические функции.

**Представление матриц.**

Матрица имеет вид , где aij-некоторые аналитические выражения, i=1,…, n; j=1,…,m. Или A=(aij)n,m. Если n и m – заданные явно натур. числа, то и запись матрицы может быть конкретной. Если в записи матрицы присутствует только правая часть, то такое представление называется явным. Если запись матриц осуществлена в односимвольном виде, т.е. левой частью (А), то такое представление называется неявным. Плотные матрицы. Это матрицы с большим кол-вом ненулевых элементов. Представляются в виде прямоугольной табл. или массива. Алгоритм Барейса. Барейс предложил семейство методов исключения без использования дробей, т.е. таких, где все необходимые деления выполняются точно. Разреженные матрицы. Методы запоминания разреженных матриц с символьными элементами аналогичны методам запоминания различных полиномов; можно использовать списки вида {(aij,i,j)}, где aij-значение элемента (аналитическое выражение), i,j-номер строки и столбца, указывающие положение этого эл-та в матрице.

**Алгебраическая функция** — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

**Разновидности алгебраических функций**

Существует **три** основных разновидности **алгебраических функций**.

**Целые рациональные функции** (многочлены, полиномы) Это функции вида  - постоянные действительные числа, называемые коэффициентами, n -- целое неотрицательное число. Если an≠0, то n называют степенью многочлена.

**Дробно-рациональные функции** (рациональные дроби)

Это функции вида представляющие собой отношение двух многочленов.

**Иррациональные функции.** В состав таких функций входят рациональные функции с нецелыми рациональными показателями степени при использовании арифметических действий. Внешний признак иррациональной функции -- наличие корней различной степени.

**Матрицы**

**Матрица (m х n)** — прямоугольная двумерная таблица, содержащая m строк и n столбцов элементов, каждый из которых может быть представлен числом, константой, переменной, символьным или математическим выражением (расширительная трактовка матрицы).